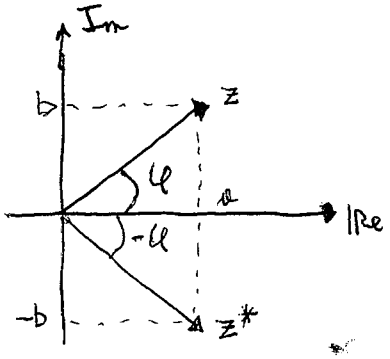
COMUNICAZIONI NUMERICHE

Numeri complessi

$z = a + jb \qquad a \in \mathbb{R} \qquad b \in \mathbb{R}$

$a = \mathrm{Re}\{z\}$

$b = \mathrm{Im}\{z\}$



Forma polare: $z = c\, e^{j\varphi}$ con $\begin{cases} c = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} a = c\cos\varphi \\ b = c\sin\varphi \end{cases}$

$z^* = a - jb = c\, e^{-j\varphi}$

$\begin{cases} \mathrm{Re}\{z\} = a = \frac{1}{2}\left(z + z^*\right) \\ \mathrm{Im}\{z\} = b = \frac{1}{2j}\left(z - z^*\right) \end{cases}$

Formule di Eulero

$\begin{cases} a = \cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \\ b = \sin\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \end{cases}$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

Somma

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Prodotto

$$z = z_1 \cdot z_2 = c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2} = c_1 c_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Divisione

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Integrale

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + j\int_a^b y(t)\,dt$$

Derivata

$$\frac{d\,z(t)}{dt} = \frac{d\,x(t)}{dt} + j\frac{d\,y(t)}{dt}$$

$\begin{cases} z \cdot z^* = c^2 e^{j(\varphi-\varphi)} = c^2 = |z|^2 \\ |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2+b^2} = c \end{cases}$

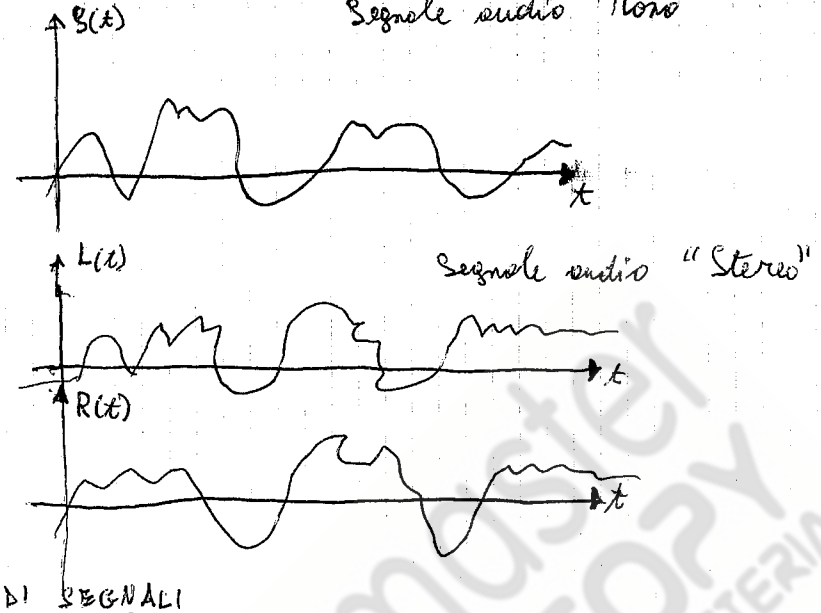
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEORIA DEI SEGNALI

Segnale: Grandezza fisica variabile e cui è associata un informazione

$S(X) \quad S \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n$

Es:



Segnale audio "Mono"

Segnale audio "Stereo"

TIPI DI SEGNALI

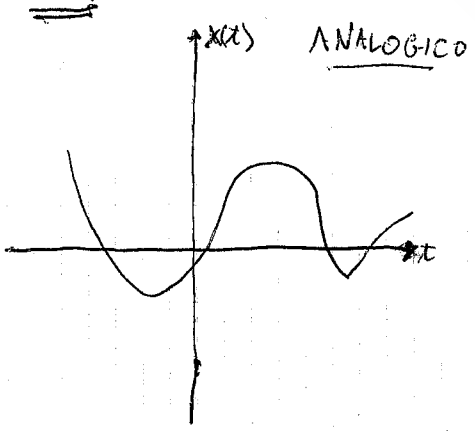
A tempo continuo = La funzione può assumere tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ nel ~~codominio~~ dominio

A tempo discreto = Può assumere solo determinati valori di t, questi segnali vengono chiamati successioni o sequenze (es. segnale cinematografico).

Ad ampiezza continua: Il dominio può assumere tutti i valori $S(x) \in \mathbb{R}$.

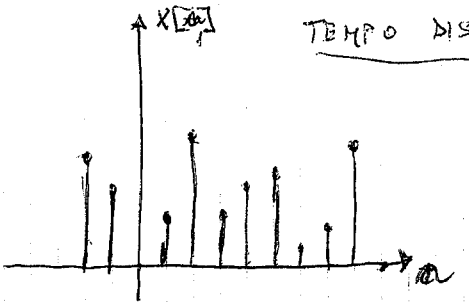
Ad ampiezza discreta: La funzione può assumere solo determinati valori

Es:



ANALOGICO

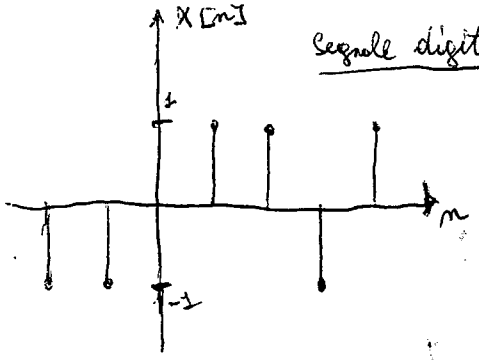
Ampiezza continua e tempo continuo



TEMPO DISCRETO

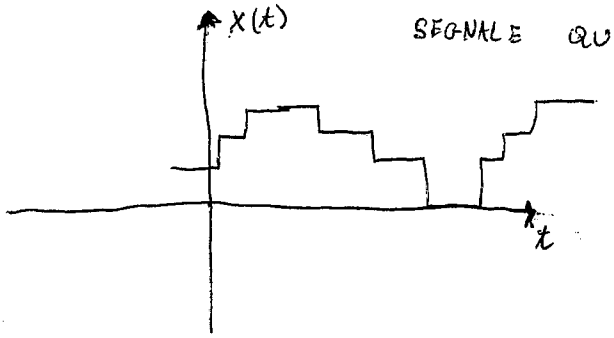
tempo discreto e ampiezza continua

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



Segnale digitale

Tempo e empiezza discreta



SEGNALE QUANTIZZATO

Tempo continuo e empiezza discreta.

CATEGORIE DI SEGNALI

SEGNALI DETERMINISTICI: Il valore del segnale è univocamente determinabile e quindi rappresentabile tramite funzione analitica.

SEGNALI ALEATORI: Segnali affetti da incertezza dove sono presenti disturbi e rumori (Alea), è necessario ricorrere alla teoria della probabilità per studiare e modellare questo tipo di segnali.

SEGNALI DETERMINISTICI

Potenza $P_x(t) \triangleq |x(t)|^2$ (uguale a)

ES: Considerando la potenza dissipata su una resistenza si ha $P = R \cdot i(t)^2$ dove R è un coefficiente di proporzionalità tipico dell'elemento

N.B. La potenza del segnale è il quadrato della norma.

Energia $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,dt$ $\qquad P(t) = \frac{dE(t)}{dt}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

Tempo Continuo

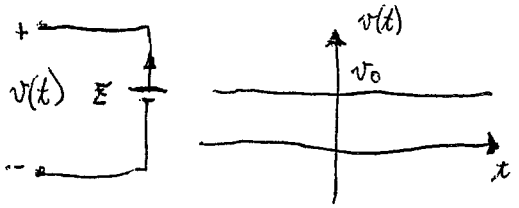
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Tempo discreto

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Per tutti i segnali fisici reali dovrebbe risultare $E_x < \infty$ cioè finita, ma se noi consideriamo i segnali ideali come la batteria ideale dobbiamo effettuare un troncamento del segnale.

ES:



troncamento del segnale.

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

N.B. È necessario introdurre il concetto di potenza media valutata sull'intervallo di valutazione

Partendo dalla formula per il valor medio di una funzione su un intervallo

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

si può ricavare la formula per la potenza media.

Potenza media

$$P_X \triangleq \lim_{T\to\infty} P_{X_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{X_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

↓ si estende la potenza a tutto l'asse dei tempi.

$$P_{X_T} \triangleq \frac{E_{X_T}}{T}$$

N.B. { Un segnale a energia finita ha $P_{X_T} \triangleq 0$
{ Uno $P_{X_T} \triangleq K$ (finito) ha ~~potenza~~ energia infinita

Valore Efficace: valore che dovrebbe avere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato.

$$V_{eff} \triangleq \sqrt{P_X}$$

Potenza per i segnali a tempo discreto: $P_X \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

Valore medio temporale:

$$X_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \qquad \text{(Tempo Continuo)}$$

$$X_m \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]| \qquad \text{(Tempo discreto)}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Potenza di una batteria ideale

$$P_V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_0^2\,dt = \lim_{T\to\infty} v_0^2\,\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt =$$

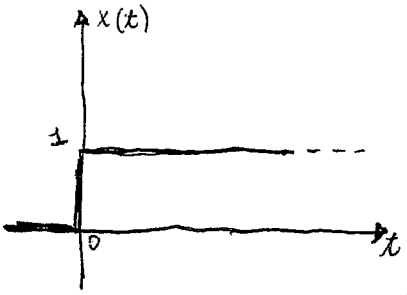
$$= v_0^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\cdot t\Big|_{-T/2}^{T/2} = v_0^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right] = v_0^2$$

($\frac{T}{2}+\frac{T}{2} = T$)

SEGNALI NOTEVOLI

Gradino

$X(t) = \mu(t)$



$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$E_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{0}_{=0}\cdot dt + \int_{0}^{+\infty} dt = \boxed{+\infty = E_\mu}$$

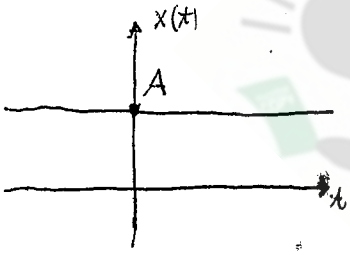
$$P_\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{\emptyset} 0\cdot dt + \int_{\emptyset}^{T/2} dt\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = P_\mu}$$

$$\boxed{\mu_{eff} = \sqrt{P_\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\mu_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\emptyset}^{T/2} dt = \frac{1}{2}$$

Costante

$X(t) = A \quad \forall t \quad (-\infty < t < \infty)$



$$X(t) = A \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\,dt = A^2 t \Big|_{-\infty}^{\infty} = A^2 \cdot 2\infty = \infty$$

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |A|^2\,dt = |A|^2 \lim_{T\to\infty} T \cdot \frac{1}{T} = |A|^2$$

$$X_{eff} = \sqrt{P_X} = |A|$$

$$P_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A\,dt = A$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745